

3-正則平面グラフを用いた結び目の構成に関する定理

長島 隆廣

1. はじめに

本論文は、数学の一分野である結び目理論に関する研究報告である。以下では、3-正則平面グラフを導入した結び目の構成法について述べる。この構成法は3段階に分かれており、各段階にはそれぞれ1つずつの定理が存在する。3つの互いに独立した定理に基づいて結び目を構成してゆく。結び目を構成する作業は、しばしば、「結び目の表を作る」と言われる。結び目の表を作る方法にはガウス数列を用いる方法 [13] や、基本多面体を用いる方法 [13] などがある。本論文で示す構成法は、ガウス数列や基本多面体を用いる方法とは異なる。

現在までのところ、本論文の構成法は、互いに素な全ての結び目を重複なく、かつ余すことなく構成できるというものではない。しかし、この構成法を改良すれば、重複なく全ての素な結び目を系統的に、順序よく、構成できる可能性があると考えられる。なぜならば、3-正則平面グラフを用いる方法により全ての結び目、絡み目を表現できるからである。

2. 3つの定理による結び目の構成方法

本論文で提示する3つの定理を、それぞれ偶数タンگل結び目定理、奇数タンگل結び目定理、全域木結び目定理と仮に呼んでおく。以下に、3つの定理の概要を示す。

概要 (2.1). 偶数タンگل結び目定理の概要説明。2重性並行表示 [12] で表現された任意の結び目に対して、2重性並行表示内の任意の2次タンگل [8, 11] の平行直線部分 (—) を偶数個の α -タンگل (図 1) [12] か、または偶数個の β -タンگل (図 1) [12] で置き換えて得る2重性並行表示は、再び別の結び目となることを主張する定理。

概要 (2.2). 奇数タンگل結び目定理の概要説明。2重性並行表示で表現された任意の結び目に対して、その2重性並行表示を方向付けし、逆方向の2次タンگل (房) を1つ選び、その房 (図 2) の交差点数を1つだけ増加または減少させて得る新しい2重性並行表示は、再び別の結び目となることを主張する定理。

概要 (2.3). 全域木結び目定理の概要説明。3-正則平面グラフの全域木 [1, 2, 4, 5, 7, 10, 15] を用いて、結び目を構成する方法を示す定理。

以下では、上記の3つの定理を記述し、結び目の構成方法を述べる。定理は接続行列 [4, 5, 15] を用いて記述するので、結び目および絡み目の3-正則平面グラフによる行列表示の定義を次の2.1項で示す。なお、接続行列の要素と頂点および辺の位置関係を付録 A の図 20 に示しておく。

また、本論文で用いるタンگلの定義を次の2.1項で示す。

2.1 タングルおよび行列表示に関する諸定義

本論文で用いるタングルの図形を以下に定義する．

定義 2.1.1 タングルの図形を図 1 に図示する．図 1 に示した各タングルは，(a) を α -タングル，(b) を β -タングル，(c) を γ -タングル，(d) を δ -タングルと呼ぶ．また， α -タングルを α ， β -タングルを β ， γ -タングルを γ ， δ -タングルを δ で表す．■

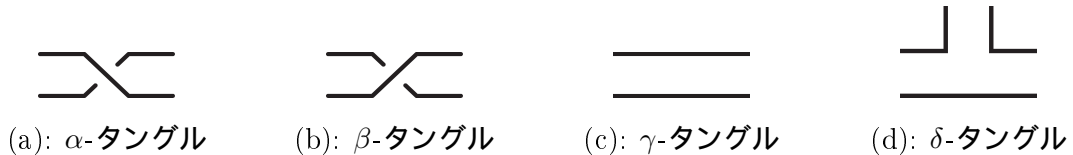


図 1: 本論文で用いる基本的な 4 つのタングル．

本論文では，2 重性並行表示内のタングルを「房」と呼ぶ．すなわち，「2 重性並行表示の房 [9] とは， δ -タングル (δ) [12] と他の δ -タングルの中間に存在する 2 次タングルである」とする．図形で示すと図 2 になる．

図 2 の X が房である．一般に，房の 2 次タングル X は，複数個の α -タングル (α) [12] か，または，複数個の β -タングル (β) [12] か，または， γ -タングル (γ) [12] のいずれか 1 つになる．

図 2 の Δ_1 と Δ_2 は， δ -タングル部分なので，房には含まれない．なお，房はグラフ化表示 [12] では，交差点を配置されたグラフの辺に相当する．次に，房へ 2 次タングルを追加する操作を定義する．



図 2: 房の図解．

定義 2.1.2 α -タングル，または， β -タングルを χ で表し，この χ を χ -タングルと呼ぶ．すなわち， $\chi = \alpha$ ，または， $\chi = \beta$ である． χ -タングルの図形を図 3 に示す．■



図 3: χ -タングル．

定義 2.1.3 h を正の整数とし， $h\alpha$ -タングル，または， $h\beta$ -タングルを $h\chi$ で表す．この $h\chi$ を $h\chi$ -タングルと呼ぶ．すなわち， $h\chi = h\alpha$ ，または， $h\chi = h\beta$ である． $h\chi$ -タングルの図形を図 4 に示す．■



図 4: $h\chi$ -タングル．

定義 2.1.4 γ -タングル，または， $h\chi$ -タングルを ε で表し，この ε を ε -タングルと呼ぶ．すなわち， $\varepsilon = \gamma$ ，または， $\varepsilon = h\chi$ である． ε -タングルの図形を図 5 に示す．■

定義 2.1.5 2 重性並行表示内に存在する γ -タングル (図 5(a)) を χ -タングル (図 3) に置き換える変形を γ - χ タングル変形 と呼ぶ．この γ - χ タングル変形を $\gamma \dot{+} \chi$ または $\chi \dot{+} \gamma$ で表す．■

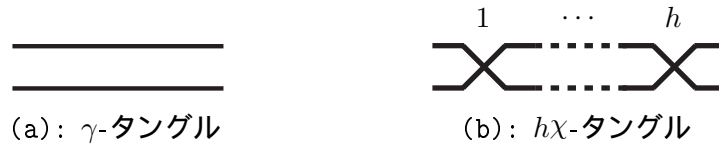


図 5: 定義 2.1.4 における \varkappa -タンゲルの図解 .

定義 2.1.6 互いに独立した χ -タンゲルを χ, χ' とし, $1 \leq h' \leq h-1$ を満たす正の整数を h' とする . 2 重性並行表示内の $h\chi$ -タンゲル (図 4) を図 6(a), または図 6(b), または図 6(c) に置き換える変形を $h\chi$ - χ' タンゲル変形 と呼ぶ . この $h\chi$ - χ' タンゲル変形を $h\chi \dot{+} \chi'$ または $\chi' \dot{+} h\chi$ で表す .

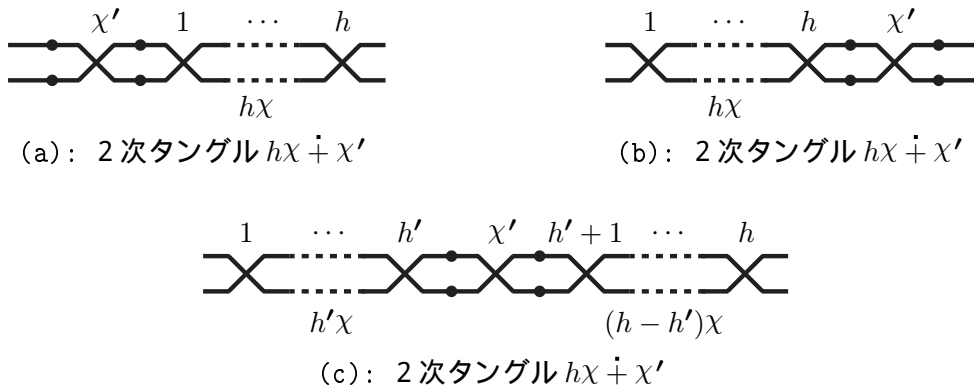


図 6: 定義 2.1.6 における $h\chi$ - χ' タンゲル変形の図解 .

■ (以上 定義 2.1.6)

なお, 定義 2.1.6 の図 6 の黒丸 “•” は, 置き換えにより新しく与えられた χ -タンゲル (χ') の位置を示している . 新しく与えた χ' の位置が, 図 6 の (a), (b), (c) で互いに異なる . このため, 図 6 の (a), (b), (c) は異なる 2 次タンゲルのように見える . しかし, これらの図 6(a), (b), (c) は, χ, χ' に具体的な α , または, β を任意に入れたとき, いずれも同じ 2 次タンゲルになる .

次に, 3-正則平面グラフおよび行列表示に関する定義を与える .

定義 2.1.7 (結び目と絡み目の 2 重性並行表示) 結び目 K の 2 重性並行表示を \mathbb{K} とし, 絡み目 L の 2 重性並行表示を \mathbb{L} とする . ■

定義 2.1.8 (3-正則平面グラフ) 弧状連結 [3] な 3-正則平面グラフを G とする . G には橋 [1, 4, 5, 6, 7, 15] が存在しないものとする . ■

定義 2.1.9 (G の頂点) 3-正則平面グラフ G の頂点を $v_i (i = 1, 2, \dots, m)$ とする . ■

定義 2.1.10 (G の辺) 3-正則平面グラフ G の辺を $e_j (j = 1, 2, \dots, n)$ とする . ■

定義 2.1.11 (基底グラフ) 3-正則平面グラフ G の各辺へ任意に有限個の α -タンゲルか, または有限個の β -タンゲルか, または γ -タンゲルを与え, かつ, 各頂点へは δ -タンゲルを与えて得られるグラフ化表示 [12] に対応する 2 重性並行表示が \mathbb{L} のとき, G を \mathbb{L} の基底グラフと呼び, $G(\mathbb{L})$ と書く . ■

下記の定義 2.1.12 の (2.2) 式で, $a_{ij} = 0$ の “ v_i と e_j が接続していない場合” とは, 「 v_i が e_j の端点でない場合」 のことであり, $a_{ij} = X_{ij}$ の “ v_i と e_j が接続している場合” とは, 「 v_i が e_j の端点である場合」 のことをいう. (2.3) 式の $p_{ij}\alpha$ -タングルは, 交差点の数が p_{ij} の α -タングルであり, $q_{ij}\beta$ -タングルは, 交差点の数が q_{ij} の β -タングルをいう.

一方, 定義 2.1.12 の (2.3) 式は, ある i と j を指定したとき, X_{ij} が, $p_{ij}\alpha$ -タングルか, または, $q_{ij}\beta$ -タングルか, または, γ -タングルのいずれか 1 つをとるという意味を表す.

定義 2.1.12 (2重性並行表示の行列表示) 絡み目の2重性並行表示 \mathbb{L} の基底グラフが $G(\mathbb{L})$ のとき, \mathbb{L} の行列表示を $M(G, a_{ij}, X_{ij}, \mathbb{L})$ と書き, $M(G, a_{ij}, X_{ij}, \mathbb{L})$ を

$$M(G, a_{ij}, X_{ij}, \mathbb{L}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続していない場合}), \\ X_{ij}, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続している場合}), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$X_{ij} = \begin{cases} p_{ij}\alpha, & (p_{ij}\alpha\text{-タングルを意味する. } p_{ij} \text{ は正の整数}), \text{ または,} \\ q_{ij}\beta, & (q_{ij}\beta\text{-タングルを意味する. } q_{ij} \text{ は正の整数}), \text{ または,} \\ \gamma, & (\gamma\text{-タングルを意味する}), \end{cases} \quad (2.3)$$

による (2.1) 式, および (2.2) 式, および (2.3) 式で定義する. ■

なお, 定義 2.1.12 において, 絡み目の2重性並行表示 \mathbb{L} を結び目の2重性並行表示 \mathbb{K} に, 基底グラフ $G(\mathbb{L})$ を $G(\mathbb{K})$ に, $M(G, a_{ij}, X_{ij}, \mathbb{L})$ を $M(G, a_{ij}, X_{ij}, \mathbb{K})$ にそれぞれ置き換えれば, 結び目の2重性並行表示 \mathbb{K} の行列表示の定義が得られる.

行列表示 (2.1) 式の右辺の行列については, 具体的な型がある. それは, 各行の要素 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ のうち, 3 つだけに2次タングルが現れて, その他はすべて0となる. すなわち, 各行にそれぞれ3つの2次タングルが現れる. 同様に, 各列も要素 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj}$ のうち, 2 つだけに2次タングルが現れて, その他はすべて0となる. すなわち, 各列にはそれぞれ2つの2次タングルが現れる. 何故かと言えば, 3-正則平面グラフの接続行列だからである. すなわち, 3-正則平面グラフは, 各頂点に3つの辺が接続しており, 各辺の両端に2つの頂点が存在するからである. 以下に3-正則平面グラフとその行列表示の実例を示す.

図7は結び目 8_{21n} のグラフ化表示 [12] で, 図8は樹下・寺阪結び目のグラフ化表示である. 図7 (結び目 8_{21n}) の行列表示を $M(8_{21n})$ とし, 図8 (樹下・寺阪結び目) の行列表示を $M(KT)$ とすると

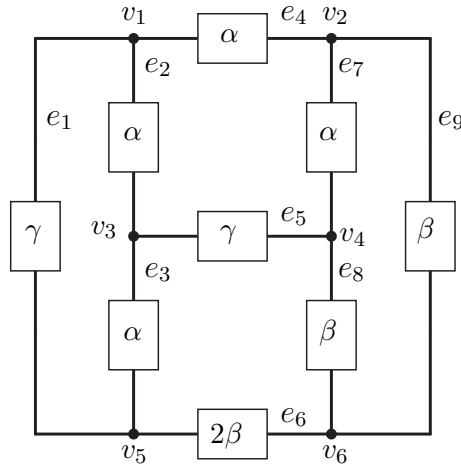


図 7: 結び目 8_{21n} のグラフ化表示

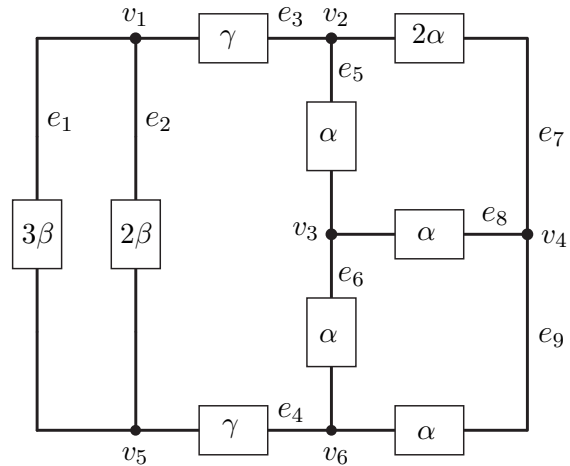


図 8: 樹下・寺阪結び目のグラフ化表示

$$M(8_{21n}) = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha & 0 & 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & 0 & \beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \beta \\ \cdot & \alpha & \alpha & \cdot & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & \cdot & \alpha & \beta & \cdot \\ \gamma & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & 2\beta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2\beta & \cdot & \beta & \beta \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$M(KT) = \begin{pmatrix} 3\beta & 2\beta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \alpha & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha & \alpha \\ 3\beta & 2\beta & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta & 2\beta & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma & \cdot & \alpha & \cdot & 2\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \alpha & \cdot & \alpha & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2\alpha & \alpha & \alpha \\ 3\beta & 2\beta & \cdot & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

と書ける．(2.4) 式および (2.5) 式の右端の行列は，0 を “ \cdot ” (center dot) に変えた表示である．これは行列の要素としての 2 次タングルの並び方を見易くするための表示である．

接続行列表示 (2.4) 式および (2.5) 式の記述方法は，付録 A の (2.26) 式および (2.27) 式と図 20 の解説図で説明してある．

2.2 偶数タングル結び目定理

行列表示を用いた偶数タングル結び目定理を以下に示す．

定理 2.2.1 (偶数タングル結び目定理) 下記に示す (2.6) 式と (2.7) 式と (2.8) 式で与えられる行

列表示

$$M(G, a_{ij}, X_{ij}, \mathbb{K}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続していない場合}), \\ X_{ij}, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続している場合}), \end{cases} \quad (2.7)$$

$$X_{ij} = \begin{cases} p_{ij}\alpha, & (p_{ij}\alpha\text{-タンゲル, } p_{ij} \text{ は正の整数}), \text{ または,} \\ q_{ij}\beta, & (q_{ij}\beta\text{-タンゲル, } q_{ij} \text{ は正の整数}), \text{ または,} \\ \gamma, & (\gamma\text{-タンゲル}), \end{cases} \quad (2.8)$$

が結び目を表現しているとする．このとき，(2.8) 式の X_{ij} を次に示す (2.9) 式の Y_{ij} で置き換えて得られる行列を $M(G, a_{ij}, Y_{ij}, \mathbb{K}_x)$ とすれば，この行列表示 $M(G, a_{ij}, Y_{ij}, \mathbb{K}_x)$ は， \mathbb{K}_x を 2 重性並行表示にもつ結び目である．

$$Y_{ij} = \begin{cases} (p_{ij} + 2)\alpha, & (X_{ij} = p_{ij}\alpha \text{ のとき}), \text{ または,} \\ (p_{ij} - 2)\alpha, & (X_{ij} = p_{ij}\alpha \text{ のとき}), \\ (q_{ij} + 2)\beta, & (X_{ij} = q_{ij}\beta \text{ のとき}), \text{ または,} \\ (q_{ij} - 2)\beta, & (X_{ij} = q_{ij}\beta \text{ のとき}), \\ 2\alpha, & (X_{ij} = \gamma \text{ のとき}), \text{ または,} \\ 2\beta, & (X_{ij} = \gamma \text{ のとき}). \end{cases} \quad (2.9)$$

ただし，(2.9) 式の $Y_{ij} = (p_{ij} - 2)\alpha$ および $Y_{ij} = (q_{ij} - 2)\beta$ に関しては，

$$Y_{ij} = \begin{cases} \beta, & (p_{ij} - 2)\alpha = -1 \cdot \alpha \text{ のとき } (p_{ij} = 1 \text{ の場合}), \\ \gamma, & (p_{ij} - 2)\alpha = 0 \cdot \alpha \text{ のとき } (p_{ij} = 2 \text{ の場合}), \\ \alpha, & (q_{ij} - 2)\beta = -1 \cdot \beta \text{ のとき } (q_{ij} = 1 \text{ の場合}), \\ \gamma, & (q_{ij} - 2)\beta = 0 \cdot \beta \text{ のとき } (q_{ij} = 2 \text{ の場合}) \end{cases} \quad (2.10)$$

とする．■

上記の行列表示を用いて表現されている偶数タンゲル結び目定理は，一見複雑そうに見えるが，その内容は実に簡単なのである．それを理解してもらうために，文章のみの表現による偶数タンゲル結び目定理を 2 種類，以下に示す．

(*) 定理 2.2.1 (偶数タンゲル結び目定理) の文章による表現 (1)

任意に与えられた結び目の2重性並行表示において、2重性並行表示内の任意の房へ、 2α -タングルか、または、 2β -タングルを付け加えて得られる新しい2重性並行表示は、再び、別の結び目となる。■

(**). 定理 2.2.1 (偶数タングル結び目定理) の文章による表現 (2)

任意に与えられた結び目の2重性並行表示において、2重性並行表示内の任意の房の交差点の数を2だけ増加させるか、または、2だけ減少させて得られる新しい2重性並行表示は、再び、別の結び目となる。■

上述の(*)印をつけた文章中の「付け加えて」とは、房の交差点数を2だけ増加または、減少させるという意味になる。すなわち、まったく任意に、房の交差点数を2だけ増減させても再び別の結び目になり、決して絡み目にはならないことを偶数タングル結び目定理は主張している。この主張を定理の表現に取り入れた文章が上述の(**)印をつけたものである。

(*)印や(**)印のように、文章だけで定理を表現すると、誤解や意味不明な点や不正確な点の発生することがあるので、正確さと厳密性を保つために、定理 2.2.1 の偶数タングル結び目定理は、行列表示で表現してある。次に、偶数タングル結び目定理を χ -タングルを用いて記述してみる。次の行列表示 (2.11) 式

$$M(G, b_{ij}, X_{ij}, \mathbb{K}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1, \nu-1} & 0 & b_{1, \nu+1} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{i, \nu-1} & 0 & b_{i, \nu+1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\lambda-1, 1} & \dots & b_{\lambda-1, \nu-1} & 0 & b_{\lambda-1, \nu+1} & \dots & b_{\lambda-1, n} \\ b_{\lambda 1} & \dots & b_{\lambda, \nu-1} & b_{\lambda \nu} & b_{\lambda, \nu+1} & \dots & b_{\lambda n} \\ b_{\lambda+1, 1} & \dots & b_{\lambda+1, \nu-1} & 0 & b_{\lambda+1, \nu+1} & \dots & b_{\lambda+1, n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\mu-1, 1} & \dots & b_{\mu-1, \nu-1} & 0 & b_{\mu-1, \nu+1} & \dots & b_{\mu-1, n} \\ b_{\mu 1} & \dots & b_{\mu, \nu-1} & b_{\mu \nu} & b_{\mu, \nu+1} & \dots & b_{\mu n} \\ b_{\mu+1, 1} & \dots & b_{\mu+1, \nu-1} & 0 & b_{\mu+1, \nu+1} & \dots & b_{\mu+1, n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m, \nu-1} & 0 & b_{m, \nu+1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

が結び目であるとする。この式を簡単のために

$$M(G, b_{ij}, X_{ij}, \mathbb{K}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & 0 & \dots \\ \vdots \\ \dots & b_{\lambda \nu} & \dots \\ \vdots \\ \dots & b_{ij} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots \\ \dots & b_{\mu \nu} & \dots \\ \vdots \\ \dots & 0 & \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

と書く．このとき，次の (2.13) 式は結び目になる．

$$M(G, b_{ij}, Y_{ij}, \mathbb{K}_x) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ \dots\dots\dots & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ \dots\dots\dots & b_{\lambda\nu} + 2\chi & \dots \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ \dots\dots\dots & b_{ij} & \dots \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ \dots\dots\dots & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ \dots\dots\dots & b_{\mu\nu} + 2\chi & \dots \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ \dots\dots\dots & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

定理 2.2.1 (偶数タングル結び目定理) の証明は，付録 B で述べる．

2.3 奇数タングル結び目定理

以下に，奇数タングル結び目定理を示す．まず，記号と用語の定義を行う．

任意の結び目の 2 重性並行表示 \mathbb{K} に矢印で方向を付ける．方向付けされた \mathbb{K} 内の 2 次タングルは，一般に，互いに同調した向き [14] をもつタングルと，そうではない向きをもつタングルの 2 種類に分かれる．

本論文では，“互いに同調した向き” のことを 逆方向 と呼び，“そうではない向き” のことを 同方向 と呼ぶことにする．

定義 2.3.1 結び目の 2 重性並行表示 \mathbb{K} に方向を付ける．方向付けをした結び目の 2 重性並行表示を $\vec{\mathbb{K}}$ で表す．■

方向付けされた 2 重性並行表示 $\vec{\mathbb{K}}$ の各房の 2 次タングルに現れる，方向を表す矢印の全種類を図 9 に示す．図 9 は 2 次タングルの交差点を省略して，平行線の部分のみを用いて図示してある．

定義 2.3.2 2 重性並行表示の 2 次タングルに対する方向付けについて，図 9 の (a), (b), (c), (d) を同方向 と呼び，図 9 の (e), (f), (g), (h) を逆方向 と呼ぶ．

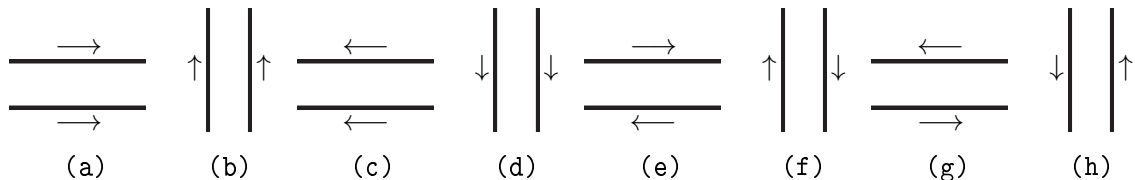


図 9: 2 重性並行表示上の同方向と逆方向の図解

■ (以上，定義 2.3.2)

定義 2.3.2 の図形について，図 9 の (b), (d), (f), (h) はそれぞれ図 9 の (a), (c), (e), (g) を反時計方向に 90 度回転した図形である．逆方向の 2 次タンゲルをすべて描き出すと，図 10 の (a), (b), 図 11 の (a), (b), 図 12 の (a), (b), 図 13 の (a), (b), 図 14 の (a), (b) になる．したがって， $\overrightarrow{\mathbb{K}}$ に存在する逆方向の各房の 2 次タンゲルは，これらの中のいずれか 1 つである．なお，図 11, 図 12, 図 13, 図 14 の各図で用いている h_1, h_2 は，いずれも任意の正の整数とする．



図 10: γ -タンゲルの房に対する逆方向の図解



図 11: 交差点数が奇数の房に対する逆方向の図解 (1)

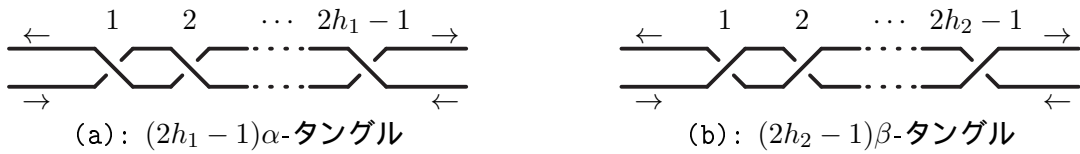


図 12: 交差点数が奇数の房に対する逆方向の図解 (2)



図 13: 交差点数が偶数の房に対する逆方向の図解 (1)



図 14: 交差点数が偶数の房に対する逆方向の図解 (2)

次に，奇数タンゲル結び目定理を述べる．

定理 2.3.1 (奇数タンゲル結び目定理) 下記に示す (2.14) 式と (2.15) 式と (2.16) 式で与えられる行列表示

$$M(G, b_{ij}, A_{ij}, \overrightarrow{\mathbb{K}}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続していない場合}), \\ A_{ij}, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続している場合}), \end{cases} \quad (2.15)$$

$$A_{ij} = \begin{cases} r_{ij}\alpha, & (r_{ij}\alpha\text{-タングル, } r_{ij} \text{ は正の整数}), \text{ または,} \\ s_{ij}\beta, & (s_{ij}\beta\text{-タングル, } s_{ij} \text{ は正の整数}), \text{ または,} \\ \gamma, & (\gamma\text{-タングル}), \end{cases} \quad (2.16)$$

が2重性並行表示 \mathbb{K} の結び目を表現しているとする. \mathbb{K} に方向付けをした2重性並行表示を $\vec{\mathbb{K}}$ で表し, その行列表示を $M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}})$ で表す. いま,

$$M(G, b_{ij}, A_{ij}, \mathbb{K}) = M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}}) \quad (2.17)$$

とし, 行列 $M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}})$ を

$$M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\nu} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{\lambda 1} & \dots & b_{\lambda\nu} & \dots & b_{\lambda n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu 1} & \dots & b_{\mu\nu} & \dots & b_{\mu n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m\nu} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続していない場合}), \\ 0, & (i \neq \lambda, i \neq \mu, j = \nu, v_i \text{ と } e_j \text{ は接続していない}), \\ b_{\lambda\nu}, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} \neq 0, v_i \text{ と } e_j \text{ は接続している}), \\ b_{\mu\nu}, & (i = \mu, j = \nu, b_{\mu\nu} \neq 0, v_i \text{ と } e_j \text{ は接続している}), \\ A_{ij}, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続している場合}), \end{cases} \quad (2.19)$$

とする. (2.18) 式の $b_{i\nu}$ は (2.19) 式に示してある通り $i = \lambda$ と $i = \mu$ のときのみ $b_{i\nu} \neq 0$ となり, 他の場合は $b_{i\nu} = 0$ である. したがって, $b_{\lambda\nu} \neq 0$ かつ $b_{\mu\nu} \neq 0$ であり, このとき $b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu}$ となる. また, 必然的に $b_{1\nu} = 0, b_{m\nu} = 0$ である. いま (2.18) 式と (2.19) 式の $b_{\lambda\nu}$ と $b_{\mu\nu}$ は, いずれも $\vec{\mathbb{K}}$ 上の逆方向の房 $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ と $\vec{Z}_{\mu\nu}$ であり, $b_{\lambda\nu} = \vec{Z}_{\lambda\nu}, b_{\mu\nu} = \vec{Z}_{\mu\nu}$ であるとする.

(2.16) 式の A_{ij} を (2.20) 式の B_{ij} で置き換えて得られる行列を $M(G, b_{ij}, B_{ij}, \mathbb{K}_y)$ とするとき,

行列表示 $M(G, b_{ij}, B_{ij}, \mathbb{K}_y)$ は, \mathbb{K}_y を 2 重性並行表示にもつ結び目である .

$$B_{ij} = \begin{cases} r_{ij}\alpha, & (j \neq \nu, A_{ij} = r_{ij}\alpha \text{ のとき}), \\ s_{ij}\beta, & (j \neq \nu, A_{ij} = s_{ij}\beta \text{ のとき}), \\ \gamma, & (j \neq \nu, A_{ij} = \gamma \text{ のとき}), \\ (r_{ij} + 1)\alpha, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = r_{ij}\alpha \text{ のとき}), \\ (r_{ij} - 1)\alpha, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = r_{ij}\alpha \text{ のとき, ただし } r_{ij} - 1 \neq 0), \\ \gamma, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = r_{ij}\alpha \text{ のとき, ただし } r_{ij} - 1 = 0), \\ (s_{ij} + 1)\beta, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = s_{ij}\beta \text{ のとき}), \\ (s_{ij} - 1)\beta, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = s_{ij}\beta \text{ のとき, ただし } s_{ij} - 1 \neq 0), \\ \gamma, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = s_{ij}\beta \text{ のとき, ただし } s_{ij} - 1 = 0), \\ \alpha, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = \gamma \text{ のとき}), \text{ または,} \\ \beta, & (i = \lambda, j = \nu, b_{\lambda\nu} = b_{\mu\nu} = \gamma \text{ のとき}). \end{cases} \quad (2.20)$$

■(以上 定理 2.3.1)

上記の行列表示を用いて表現されている奇数タングル結び目定理は, 複雑に見えて内容がのみ込みにくいと思われるので, 文章のみの表現による奇数タングル結び目定理を 2 種類, 以下に示す .

(*) . 定理 2.3.1 (奇数タングル結び目定理) の文章による表現 (1)

任意に与えられた結び目の 2 重性並行表示において, 方向付けされた 2 重性並行表示内の逆方向の房を任意に 1 つだけ選ぶ . この房へ, γ - χ タングル変形 (定義 2.1.5) か, または, $h\chi$ - χ' タングル変形 (定義 2.1.6) を与えて得られる新しい 2 重性並行表示は, 結び目である . ■

(***) . 定理 2.3.1 (奇数タングル結び目定理) の文章による表現 (2)

任意に与えられた結び目の 2 重性並行表示において, 方向付けされた 2 重性並行表示内の逆方向の房を任意に 1 つだけ選ぶ . この房の交差点数を 1 だけ増加させるか, または, 1 だけ減少させて得られる新しい 2 重性並行表示は, 結び目である . ■

上述の (*) 印文章で, γ - χ タングル変形を与えるのは, 逆方向の房が γ -タングルの場合であり, $h\chi$ - χ' タングル変形を与えるのは, 逆方向の房が $h\chi$ -タングルの場合である . (***) 印の文章は, まったく任意に, 逆方向の房の交差点数を 1 だけ増減させても再び別の結び目になり, 決して絡み目にはならないことを主張している . 言い換えれば, 逆方向の房に α -タングルか β -タングルが存在すれば交差点数を 1 だけ増減させ, 逆方向の房が γ -タングルの場合は, これを α -タングルか, または, β -タングルに変えても結び目であることを意味している .

以上が定理 2.3.1 (奇数タングル結び目定理) の主張である . ただし, ただの一度だけこの操作を行うことが出来る . なぜならば, 交差点数を 1 つ増減させた後の 2 重性並行表示は, 矢印の方

向が変化する．このため新たに方向を付け直さないと逆方向の房に対して奇数タンブル結び目定理の適用による次の交差点数増減操作は行えない．

逆方向の房へ2次タンブルを1つ付け加えた結果，房の中で α -タンブルと β -タンブルが隣同士で並んだ状態になるときは，その α -タンブルと β -タンブルの組が γ -タンブルになる． γ -タンブルになる理由は， α -タンブルと β -タンブルが並ぶ状態というのが実はライデマイスター移動II [16] を実行した結果と同じだからである．その図解を図15に示す．図15(a)と図15(b)は， α -タンブル

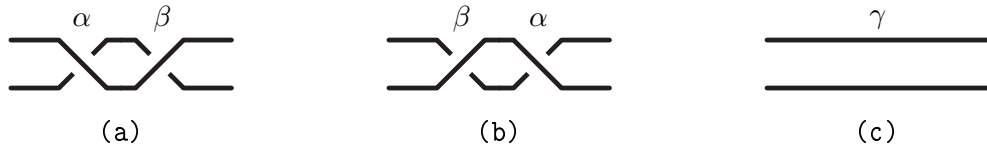


図15: α -タンブルと β -タンブルが隣同士として並ぶ状態の図解．

と β -タンブルが並んだ状態の図形を示している．図15(c)は γ -タンブルである．図15(a)および図15(b)が，図15(c)へ変形できることはライデマイスター移動IIにより明らかである．

次に，奇数タンブル結び目定理（定理2.3.1）を別の行列表示で記述してみる．方向付けをした結び目の行列表示を $M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}})$ とし， $M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}})$ を

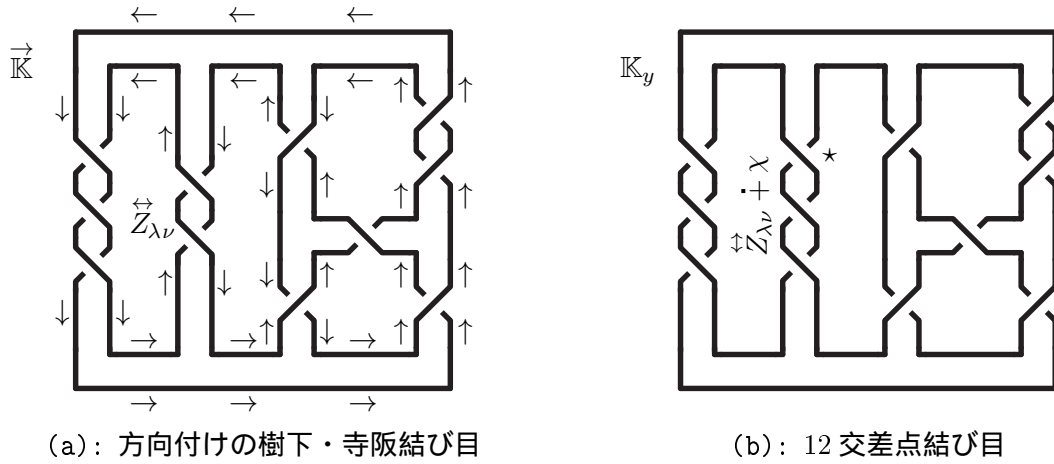
$$M(G, b_{ij}, A_{ij}, \vec{\mathbb{K}}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\nu} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{\lambda 1} & \dots & b_{\lambda\nu} & \dots & b_{\lambda n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu 1} & \dots & b_{\mu\nu} & \dots & b_{\mu n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m\nu} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\lambda\nu} & \dots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \dots & \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\mu\nu} & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

とする．ここで， $b_{\lambda\nu} = \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\lambda\nu}$ ， $b_{\mu\nu} = \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\mu\nu}$ かつ， $\overset{\leftrightarrow}{Z}_{\lambda\nu} = \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\mu\nu}$ である．このとき，

$$M(G, b_{ij}, B_{ij}, \mathbb{K}_y) = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\lambda\nu} + \chi & \dots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \dots & \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\mu\nu} + \chi & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

は \mathbb{K}_y を 2 重性並行表示とする結び目である .

奇数タングル結び目定理の図解を以下の図 16 に示す .



(a): 方向付けの樹下・寺阪結び目

(b): 12 交差点結び目

図 16: 奇数タングル結び目定理 (定理 2.3.1) が成り立つことを示す例証図 .

図 16(a) は , 図 8 の樹下・寺阪結び目のグラフ化表示を 2 重性並行表示に図形化し , 方向付けをした図である . 図 16(a) の $\overleftrightarrow{Z}_{\lambda\nu}$ は逆方向の 2 次タングルであるから , ここへ χ -タングルを付け足して $\overleftrightarrow{Z}_{\lambda\nu} \dot{+} \chi$ とすれば図 16(b) を得る . この図 16(b) が 12 交点結び目であることは明らかである . 図 16(b) の星印 “*” は付け足した χ -タングルを示している . この場合は $\overleftrightarrow{Z}_{\lambda\nu} = 2\beta$ なので $\chi = \beta$ とし , $\overleftrightarrow{Z}_{\lambda\nu} \dot{+} \chi = 2\beta \dot{+} \beta = 3\beta$ にして図示してある .

定理 2.3.1 (奇数タングル結び目定理) の証明は , 付録 C で示す .

2.4 全域木結び目定理

次に , 全域木結び目定理を記述する . まず , 記号と用語の定義から始める .

定義 2.4.1 (G の双対グラフ) 3-正則平面グラフ G の双対グラフを G^* とする . ■

定義 2.4.2 (双対グラフ G^* の頂点) 双対グラフ G^* の頂点を o_k^* ($k = 0, 1, 2, \dots, f$) とする . これらの頂点 o_k^* のうち , 非有界領域に存在する点を o_0^* とし , 有界領域に存在する点を o_k^* ($k \neq 0$) とする . ■

非有界領域とは , 3-正則平面グラフ G が存在する平面上で , 平面の領域が無限に広がる部分である . 言い換えると , どのような 2 点をとっても G とは交わずに曲線で結べる領域が非有界領域である . 一方 , 有界領域とは , 非有界領域でない G の面を言う . 言い換えると , 非有界領域上の 1 点と他の 1 点を曲線で結ぶとき , G と交わずには曲線で結べない点の存在する領域である .

定義 2.4.3 (双対グラフ G^* の辺) 双対グラフ G^* の辺を e_w^* ($w = 1, 2, \dots, n$) とする . ■

3-正則平面グラフ G の辺の数と , 双対グラフ G^* の辺の数は等しくなる . これは双対グラフの定義より明らかである .

定義 2.4.4 (G^* の全域木) 双対グラフ G^* の全域木を $\mathcal{T}(G^*)$ とする. ■

定義 2.4.5 (全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の辺) 全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の辺を $e_s^*(s = 1, 2, \dots, x)$ とする. ■

全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点は, 双対グラフ G^* の頂点と同一である. これは双対グラフの定義より明らかである.

定義 2.4.6 (辺 e_s^* と交わる G の辺) 辺 e_s^* と交わる G の辺を $e_s(s = 1, 2, \dots, x)$ とする. ■

定義 2.4.7 (G の全域木) 3-正則平面グラフ G の全域木を $\mathcal{T}(G)$ とする. ■

定義 2.4.8 (全域木 $\mathcal{T}(G)$ の辺) 全域木 $\mathcal{T}(G)$ の辺を $e_t(t = x + 1, x + 2, \dots, x + y)$ とする. ただし, $x + y = n$ とする. ■

辺 $e_t(t = x + 1, x + 2, \dots, x + y)$ は, 辺 e_s^* と交わらない G 辺である. 全域木 $\mathcal{T}(G)$ の頂点は, 3-正則平面グラフ G の頂点と同一である. これは全域木の定義より明らかである.

以下に, 全域木結び目定理を行列表示で示す.

定理 2.4.1 (全域木結び目定理) 3-正則平面グラフ G の行列表示において, 辺 $e_s(s = 1, 2, \dots, x)$ に対応する行列の要素を $a_{is}(i = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, x)$ とし, 辺 $e_t(t = x + 1, x + 2, \dots, x + y)$ に対応する行列の要素を $a_{it}(i = 1, 2, \dots, m, t = x + 1, x + 2, \dots, x + y)$ とする. このとき, 下記に示す (2.23) 式, (2.24) 式, (2.25) 式により記述される行列 $M(G, a_{is}, a_{it}, \mathbb{K})$ は, 結び目の 2 重性並行表示を表現している. ただし, $x + y = n$ とする. また, χ_s を任意の χ -タングルとし, h_s を正の整数とする.

$$M(G, a_{is}, a_{it}, \mathbb{K}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1x} & a_{1,x+1} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{is} & \cdots & a_{ix} & a_{i,x+1} & \cdots & a_{it} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mx} & a_{m,x+1} & \cdots & a_{mt} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$a_{is} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_s \text{ が接続していない場合}), \\ (2h_s - 1)\chi_s, & (v_i \text{ と } e_s \text{ が接続している場合}), \end{cases} \quad (2.24)$$

$$a_{it} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_t \text{ が接続していない場合}), \\ 2\mathfrak{X}, & (v_i \text{ と } e_t \text{ が接続している場合}). \end{cases} \quad (2.25)$$

■ (以上 定理 2.4.1)

上記の行列表示を用いて表現されている全域木結び目定理は, 一見ただけでは理解しにくいとも考えられるので, これを補うために, 2 種類の文章のみの表現による全域木結び目定理を以下に示す.

(☆). 定理 2.4.1 (全域木結び目定理) の文章による表現 (1)

互いに独立な任意の χ -タングルを χ_s, χ_t とし, 任意の正の整数を h_s, h_t とする. また, $2\chi = \gamma$ または $2\chi = 2h_t\chi_t$ とする. そして, 任意の 3-正則平面グラフ G をとり, G の辺 $e_s \in (2h_s - 1)\chi_s$ を配置し, 辺 $e_t \in 2\chi$ を配置する. G の各頂点へは δ -タングルを配置して得られる 2 重性並行表示は結び目である. ■

(☆☆). 定理 2.4.1 (全域木結び目定理) の文章による表現 (2)

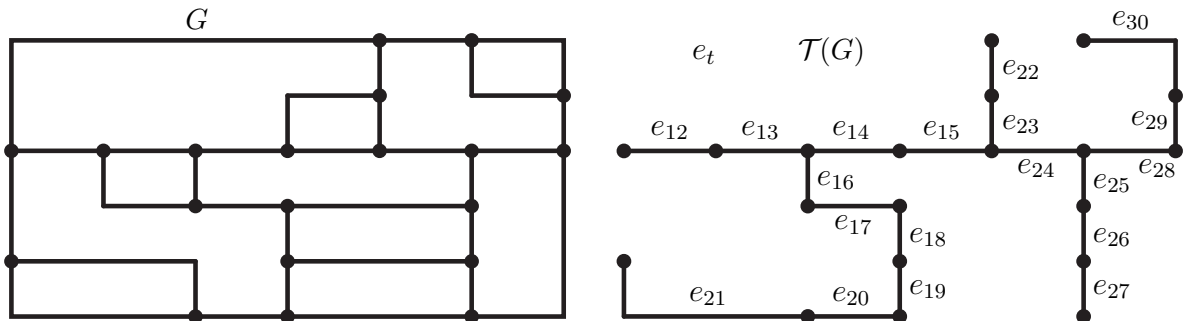
互いに独立な χ -タングルを χ, χ' とする. 任意の 3-正則平面グラフ G をとり, G の任意の全域木を $\mathcal{T}(G)$ とする. $\mathcal{T}(G)$ に属さない G の各辺へ任意に奇数 χ -タングルを与え, $\mathcal{T}(G)$ に属する各辺へは任意に偶数 χ' -タングルか, または γ -タングルを与える. 更に, G の頂点へは δ -タングルを与える. 以上により構成された 2 重性並行表示は結び目である. ■

上記の (☆) 印文章の χ_s と χ_t は互いに依存せず, 独立して, 自由に α -タングルか, または β -タングルに置き換えることができる. したがって, 2 次タングル $(2h_s - 1)\chi_s$ を与えられた G の辺は, 奇数の交差点をもつ α -タングルか, または β -タングルの房になる. 一方, 2 次タングル $2h_t\chi_t$ を与えられた G の辺は, 交差点の数が偶数の α -タングルか, または β -タングルの房になる.

上記 (☆☆) 印の記述は, G の全域木 $\mathcal{T}(G)$ を用いて, 全域木結び目定理を表現した文章である. G の各辺へ与える 2 次タングル χ と χ' は全くの任意でよく, 各辺同士も任意でよい. すなわち, 各辺は互いに依存することなく, 自由に奇数交差点または, 偶数交差点を与えてよい.

以下では, 全域木結び目定理 (定理 2.4.1) に従って結び目を構成してみる. まず, 3-正則平面グラフ G を任意に与える (図 17(a)). G の双対グラフ G^* に対して, G^* の全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を任意にとる (図 18(a)). $\mathcal{T}(G^*)$ の各辺 e_s^* と交わる G の辺 e_s (図 18(b)) に α -タングルか, または β -タングルのいずれかを任意に選択して描く (図 19 参照). 次に, $\mathcal{T}(G)$ の各辺 e_t (図 17(b)) に $2h_1\alpha$ -タングルか, または $2h_2\beta$ -タングルか, または γ -タングルのいずれか 1 つを自由に選択してそれぞれの辺に描く (図 19 参照). 最後に G の頂点へ δ -タングルを描き, G を消し去れば 2 重性並行表示が得られる (図 19 参照).

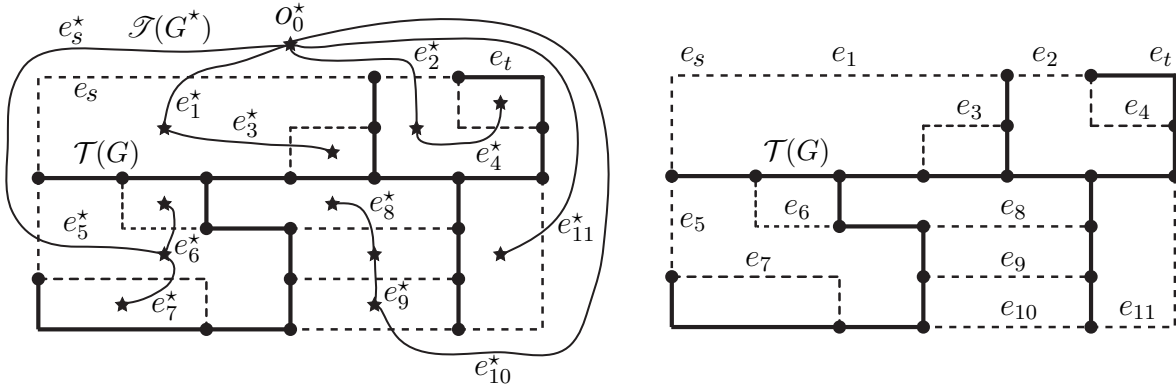
以上が全域木結び目定理の主張を利用した, 結び目の 2 重性並行表示を得る手順である.



(a): 任意に与えられた 3-正則平面グラフ G の例 (辺の数が 30 ある).

(b): G の全域木 $\mathcal{T}(G)$ の例とその辺 e_t ($t = 12, \dots, 30$).

図 17: 全域木結び目定理の解説図 (1): 3-正則平面グラフ G の例とその全域木 $\mathcal{T}(G)$ の例.



(a): 全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ とその辺 e_s^* ($s = 1, \dots, 11$). (b): $\mathcal{T}(G^*)$ と交わる G の辺 e_s ($s = 1, \dots, 11$).

図 18: 全域木結び目定理の解説図 (2): 全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の例 .

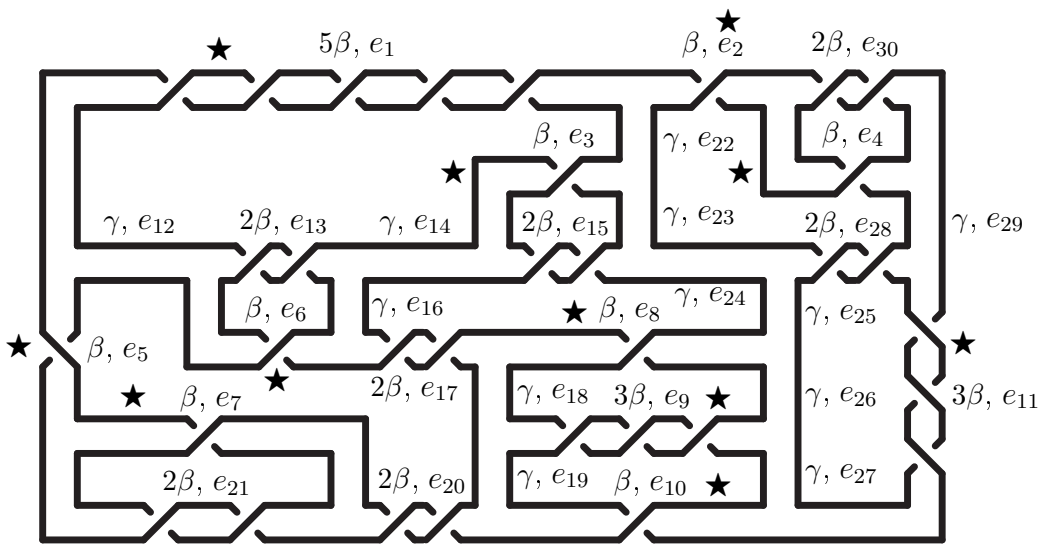


図 19: 全域木結び目定理の解説図 (3): 33 交点結び目 .

したがって、図 19 は、全域木結び目定理に基づいて構成した 33 交点結び目の 2 重性並行表示である。図形に付した星印 (★) は、全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ と交わる G の辺 e_s に与えた交差点数が奇数の 2 次タングルを示している。図 19 が結び目であることは図形により明らかである。

定理 2.4.1 (全域木結び目定理) の証明は、付録 D に記述する。また、「全域木結び目定理の証明」の解説を付録 E に記述する。

参考文献

- [1] László Lovász, 秋山仁, 榎本彦衛 監訳. グラフの構造. 東海大学出版会, 東京, 1988.
- [2] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson 共著, 一松信, 秋山仁, 惠羅 博 訳. グラフ理論への道. 地人書館, 東京, 1986.
- [3] R. H. Crowell, R. H. Fox, 寺阪英孝, 野口廣 訳. 結び目理論入門. 岩波書店, 東京, 2000. (初版 1967 年).

- [4] 惠羅博, 土屋守正. グラフ理論. 産業図書, 東京, 1996.
- [5] 浜田隆資, 秋山仁. グラフ論要説. 槇書店, 東京, 1987.
- [6] Frank Harary, 池田貞雄訳. グラフ理論. 共立出版株式会社, 東京, 1975.
- [7] N. Hartsfield, G. Ringel, 鈴木晋一 訳. グラフ理論入門. サイエンス社, 東京, 1992.
- [8] 河内明夫. 結び目理論. シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 1990.
- [9] W. B. R. Lickorish, 秋吉宏尚, 塩見真枝, 下川航也, 高向崇, 田中利史, 平澤美可三, 松本三郎, 丸本嘉彦, 村上斉 訳. 結び目理論概説. シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2000.
- [10] 前原潤, 根上生也. 幾何学的グラフ理論. 朝倉書店, 東京, 1992.
- [11] 村杉邦男. 結び目理論とその応用. 日本評論社, 東京, 1993.
- [12] 長島隆廣. 結び目と絡み目の正則表示に関する規則的な描画法. 日本数学協会論文集 (別冊 数学文化), pp. 60–70, Dec. 20, 2005.
- [13] 落合豊行, 山田修司, 豊田英美子. コンピュータによる結び目理論入門. (数理情報科学シリーズ 14). 牧野書店, 東京, 1996.
- [14] 落合豊行. 結び目とコンピュータ/結び目とブレイド. 数学セミナー, Vol. 42, No. 6, pp. 58–63, 2003.
- [15] R. J. Wilson, 斎藤伸自, 西関隆夫 訳. グラフ理論入門. 近代科学社, 東京, 1992.
- [16] 鈴木晋一. 結び目理論入門. サイエンス社, 東京, 1991.

付録 A. 接続行列についての解説

接続行列を M_{inc} とする. この接続行列 M_{inc} は,

$$M_{\text{inc}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続していない場合. 即ち, } v_i \text{ が } e_j \text{ の端点でない場合.}), \\ 1, & (v_i \text{ と } e_j \text{ が接続している場合. 即ち, } v_i \text{ が } e_j \text{ の端点である場合.}), \end{cases} \quad (2.27)$$

による (2.26) 式および (2.27) で定義され, a_{ij} は 0 または 1 の値をとる.

図 20 は 3-正則平面グラフ G の頂点 v_i および辺 e_j と接続行列の要素 a_{ij} との位置関係を示している。

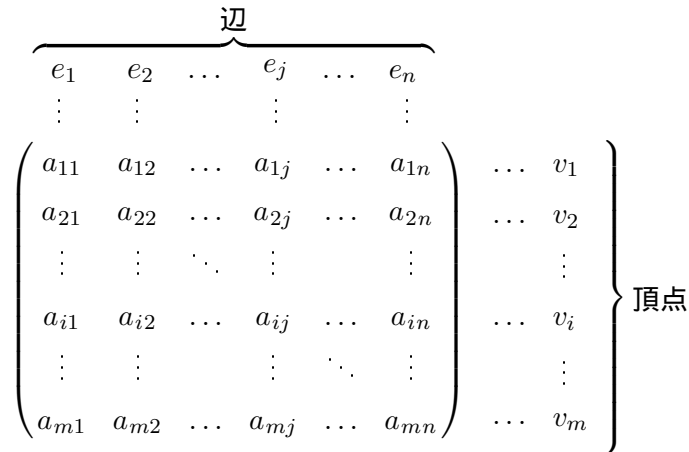


図 20: 接続行列の要素 a_{ij} と 3-正則平面グラフの頂点と辺の位置関係を示す図

付録 B. 偶数タンクル結び目定理の証明

証明 2.4.1 (定理 2.2.1(偶数タンクル結び目定理) の証明) 以下に, 偶数タンクル結び目定理の証明を与える。

任意の結び目 K の 2 重性並行表示 \mathbb{K} に対して, \mathbb{K} 内の任意の房を X とする。房 X は, 一般に, 定義 2.1.4 による 2 次タンクルの \varkappa -タンクルある。房 X 内の近傍として, 任意に平行直線部分のみを取り出して図示した図形を図 21(a) に示す。図 21(b) は, 平行直線部分が結び目の 2 重性並行表示内に存在する様子を示す一例の図解である。

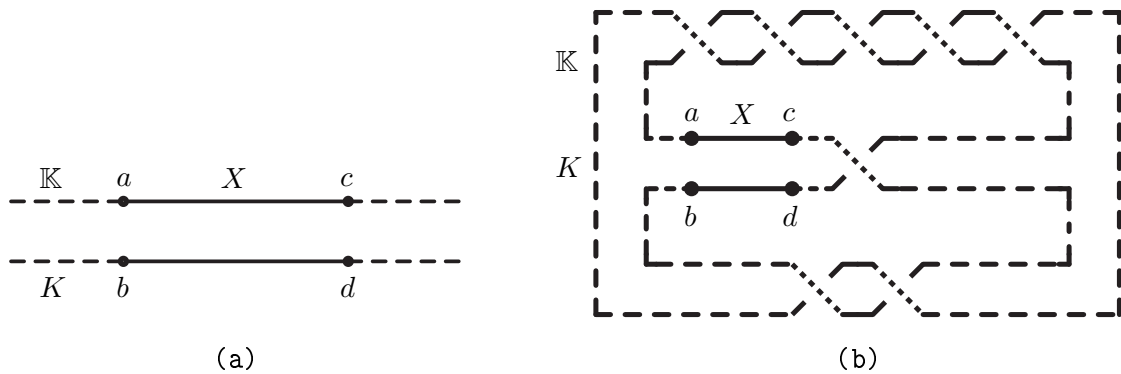


図 21: 偶数タンクル結び目定理の証明の解説図 (1).

図 21(a) は, 房 X の一部分を示すと同時に結び目 K 全体を示している図形とする。図 21(a) の a, b, c, d は房 X 上の点であり, 破線を用いて結び目の全体を省略してある。

図 21(a) が結び目になるためには 2 通りの繋がり方がある。以下で, それを示す。図 21(a) の図形は結び目の一部であるから, a 点を出た結び目の線は b 点に繋がる。かつ, c 点を出た結び目の線は d 点に繋がる。これで結び目になる。これが第一の場合で, この図形を図 22(a) に示した。

次に, 第二の場合を示す。図 21(a) において, a 点を出た結び目の線は d 点に繋がる。かつ, b 点を出た結び目の線は c 点に繋がる。これで第二の場合の結び目になる。この状態を図 22(b) に示

した．図 21(a) は結び目であるから，図 22(a) と図 22(b) の 2 通り以外の繋がり方は存在しない．

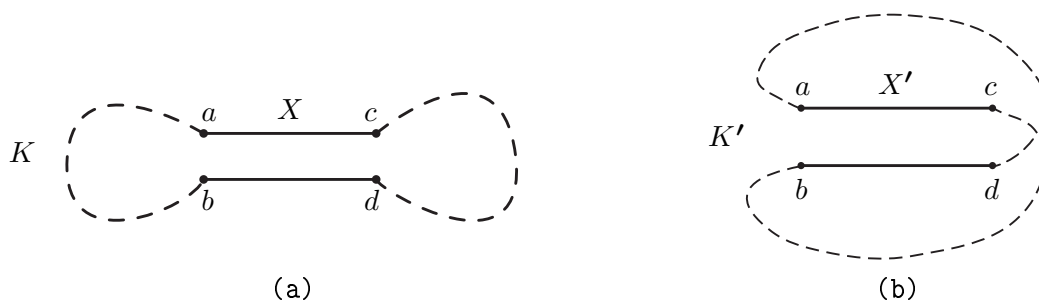


図 22: 偶数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (2).

次に，図 22(a) の結び目 K に関して，房 X へ 2 つの交差点を増加させても結び目であることを示す．まず，図 22(a) の房 X に対して，ライデマイスター移動 II を施す．この操作で得られた

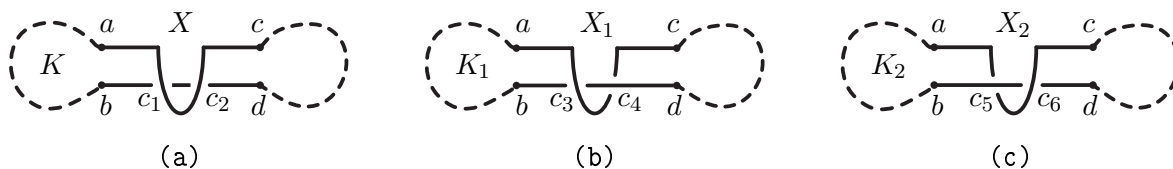


図 23: 偶数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (3).

図形を図 23(a) に示す．図 23(a) の c_1, c_2 はライデマイスター移動 II により生成された交差点である．図 23(a) の図形は，結び目 K と同値であることは図形により明らかである．

次に，図 23(a) の交差点 c_2 の上下を入れ替える．この操作で得られた図形を図 23(b) に示す．図 23(b) の X_1 は房であり， c_3, c_4 は交差点である．この図 23(b) の図形が結び目であることは，図形により明らかである．この結び目を K_1 とする．

次に，図 23(a) の交差点 c_1 の上下を入れ替える．この操作で得られた図形を図 23(c) に示す．図 23(c) の X_2 は房であり， c_5, c_6 は交差点である．この図 23(c) の図形が結び目であることは，図形により明らかである．この結び目を K_2 とする．

図 23(b) の房 X_1 に自明な変形を与えて得た結び目 K_1 と，図 23(c) の房 X_2 に自明な変形を与えて得た結び目 K_2 を図 24 に示す．



図 24: 偶数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (4).

図 24(a) の結び目 K_1 の房 X_1 に関しては， $X_1 = X \dot{+} 2\alpha$ と書ける．また，図 24(b) の結び目 K_2 の房 X_2 に関しては， $X_2 = X \dot{+} 2\beta$ と書ける．よって，図 22(a) の図形に関しては，定理 2.2.1(偶数タンゲル結び目定理) が証明された．

次に，図 22(b) の図形についての証明を示す．

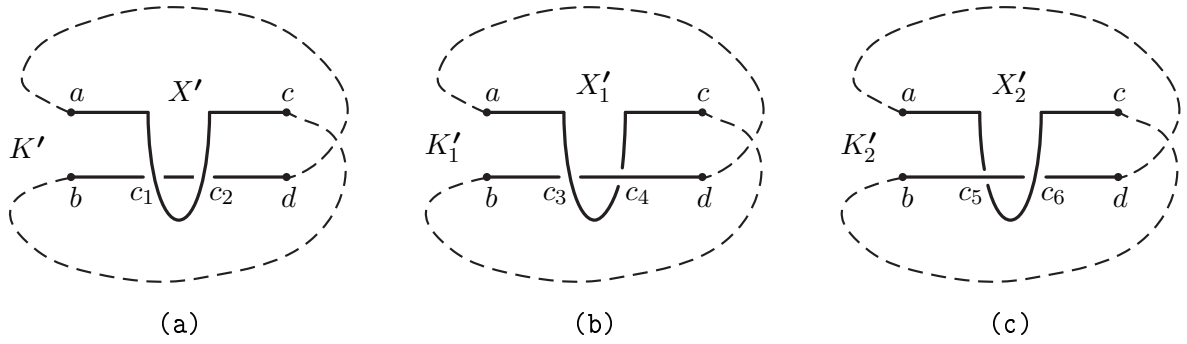


図 25: 偶数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (5).

図 22 (b) の房 X' に対して, ライデマイスター移動 II を施す. この操作で得られた図形を図 25 (a) に示す. 図 25 (a) の c_1, c_2 はライデマイスター移動 II により生成された交差点である. 図 25 (a) の図形は, 結び目 K' と同値であることは図形により明らかである.

次に, 図 25 (a) の交差点 c_2 の上下を入れ替える. この操作で得られた図形を図 25 (b) に示す. 図 25 (b) の X'_1 は房であり, c_3, c_4 は交差点である. この図 25 (b) の図形が結び目であることは, 図形により明らかである. この結び目を K'_1 とする.

次に, 図 25 (a) の交差点 c_1 の上下を入れ替える. この操作で得られた図形を図 25 (c) に示す. 図 25 (c) の X'_2 は房であり, c_5, c_6 は交差点である. この図 25 (c) の図形が結び目であることは, 図形により明らかである. この結び目を K'_2 とする.

図 25 (b) の房 X'_1 に自明な変形を与えて得た結び目 K'_1 と, 図 25 (c) の房 X'_2 に自明な変形を与えて得た結び目 K'_2 を図 26 に示す.

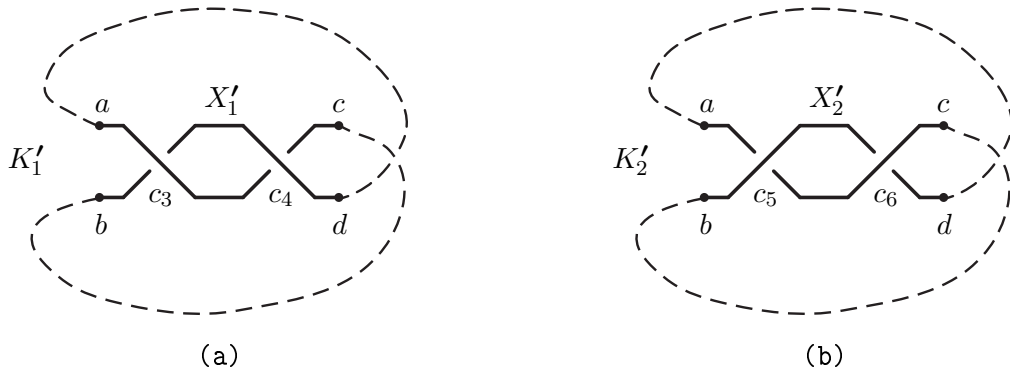


図 26: 偶数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (6).

図 26 (a) の結び目 K'_1 の房 X'_1 に関しては, $X'_1 = X \dot{+} 2\alpha$ と書ける. また, 図 26 (b) の結び目 K'_2 の房 X'_2 に関しては, $X'_2 = X \dot{+} 2\beta$ と書ける. よって, 図 22 (b) の図形に関して, 定理 2.2.1 (偶数タンゲル結び目定理) が証明された. ■ (Q.E.D.)

付録 C. 奇数タンゲル結び目定理の証明

証明 2.4.2 (定理 2.3.1 (奇数タンゲル結び目定理) の証明) 以下に, 奇数タンゲル結び目定理 (定理 2.3.1) の証明を示す.

任意の結び目 K の 2 重性並行表示 \mathbb{K} に対して，方向付けをした 2 重性並行表示を $\vec{\mathbb{K}}$ とする．2 重性並行表示 $\vec{\mathbb{K}}$ 内の逆方向の房 $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ を指定した 2 重性並行表示を $(\vec{\mathbb{K}}, \vec{Z}_{\lambda\nu})$ とする．逆方向の房 $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ 内の任意の近傍を図 27(a)，図 27(b) に示す．



図 27: 奇数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (1).

この図 27(a)，図 27(b) は，房 $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ 内の近傍として，任意の平行直線部分のみを取り出して図示している．したがって，2 重性並行表示 $(\vec{\mathbb{K}}, \vec{Z}_{\lambda\nu})$ 内のその他の部分は図を省略してある．図 27(a)，図 27(b) の矢印は，逆方向の房 $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ の方向を示している．すなわち，任意の結び目の 2 重性並行表示に現れる逆方向の房 $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ の方向は，図 27(a) または図 27(b) のいずれかである．

図 27(a) の図形は結び目の一部であるから， b 点を出た結び目の線は a 点に繋がる．同時に， c 点を出た結び目の線は d 点に繋がる．結び目であるから，これ以外の繋がり方はない．

次に，図 27(b) の図形も結び目の一部であるから， a' 点を出た結び目の線は b' 点に繋がる．同時に， d' 点を出た結び目の線は c' 点に繋がる．結び目であるから，これ以外の繋がり方はない．

これらの繋がり方の図形を図 28(a) と図 28(b) に示す．図 28(a) において，結び目を構成する線として，点 b から点 a に至る線を l_1 とし，点 c から点 d に至る線を l_2 とする．

同様に，図 28(b) においても，結び目を構成する線として，点 a' から点 b' に至る線を l'_1 とし，点 d' から点 c' に至る線を l'_2 とする．したがって， l_1, l_2, l'_1, l'_2 は，結び目の 2 重性並行表示を構成する線であるとする．

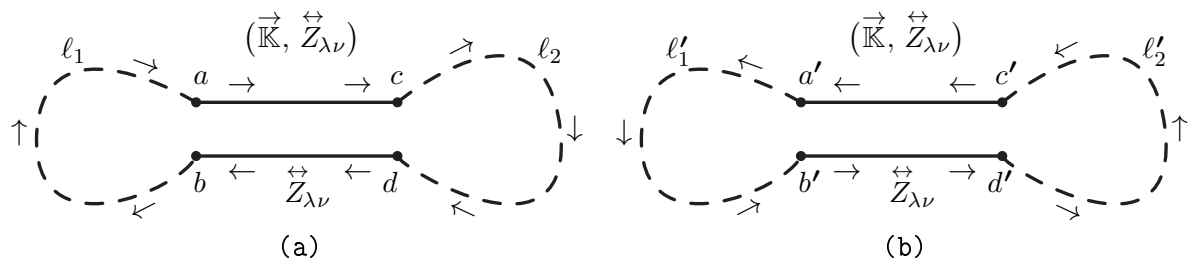


図 28: 奇数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (2).

図 28(a) および図 28(b) について， $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ を $\vec{Z}_{\lambda\nu} \dot{+} \chi$ で置き換えて得た図形を図 29(a)，図 29(b) および図 30(a)，図 30(b) に示した．

図 29(a) と図 29(b) においては， $\chi = \alpha$ として図示してある．また，図 30(a) と図 30(b) においては， $\chi = \beta$ として図示してある．

以上により， $\vec{Z}_{\lambda\nu}$ を $\vec{Z}_{\lambda\nu} \dot{+} \chi$ で置き換えて得た図形である図 29(a)，図 29(b) および図 30(a)，図 30(b) は，明らかに結び目である．よって，定理 2.3.1 (奇数タンゲル結び目定理) が示された．したがって，行列 $M(G, b_{ij}, B_{ij}, \mathbb{K}_y)$ が示す 2 重性並行表示 \mathbb{K}_y は結び目である．

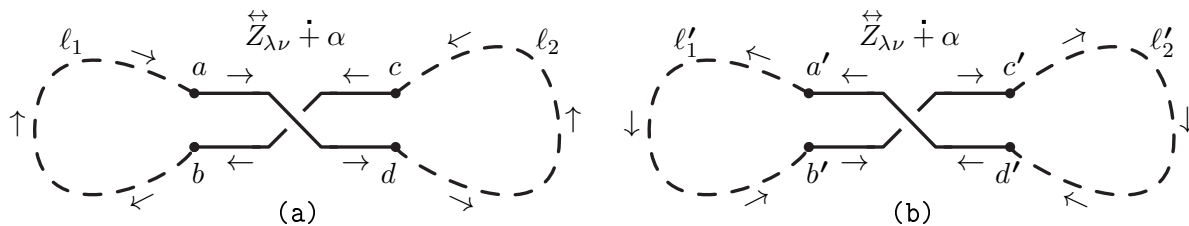


図 29: 奇数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (3).

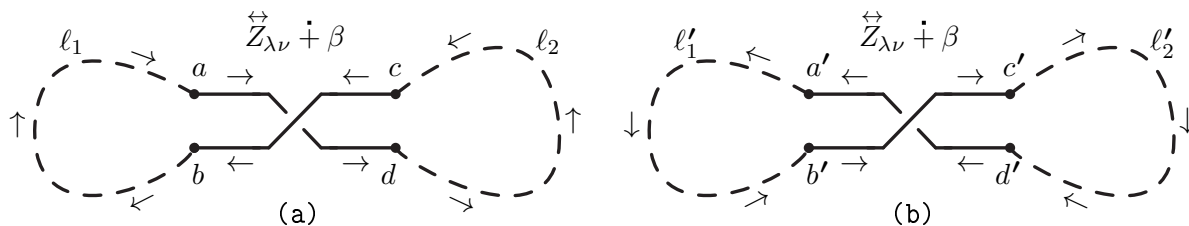


図 30: 奇数タンゲル結び目定理の証明の解説図 (4).

■ (Q.E.D.) (定理 2.3.1 の証明おわり)

付録 D. 全域木結び目定理の証明

証明 2.4.3 (定理 2.4.1(全域木結び目定理) の証明) 以下に, 全域木結び目定理 (定理 2.4.1) の証明を与える .

任意の 3-正則平面グラフ G を平面上にとり¹⁾, G の双対グラフ G^* から G^* の全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を任意にとる²⁾. 次に, G および $\mathcal{T}(G^*)$ を内部に含む単純閉曲線を平面上にとる. この単純閉曲線を結び目と考えると $K_{0,0}$ とする³⁾. $K_{0,0}$ は任意の単純閉曲線であるから結び目であることは明らかである. 次に, 全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を変形し, $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点 o_0^* を結び目 $K_{0,0}$ の外部に移す⁴⁾.

結び目 $K_{0,0}$ にライデマイスター移動 I を施して得る図形は結び目である. この図形を $K_{0,1}$ とする⁵⁾. $K_{0,1}$ が結び目であることは図形から明らかである .

結び目 $K_{0,1}$ にライデマイスター移動 I を施して得る図形は結び目である. この図形を $K_{0,2}$ とする⁶⁾. $K_{0,2}$ が結び目であることは図形から明らかである .

結び目 $K_{0,0}$ にライデマイスター移動 I を $x - 1$ 回施して得る図形を結び目であると仮定する . この図形を $K_{0,x-1}$ とする⁷⁾. すなわち, 図形 $K_{0,x-1}$ を結び目と仮定する .

結び目 $K_{0,x-1}$ にライデマイスター移動 I を施して得る図形は結び目である. この図形を $K_{0,x}$ とする⁸⁾. すなわち, 図形 $K_{0,x}$ は結び目である .

図形 $K_{0,x}$ が結び目でないとは仮定すると, $K_{0,0}$ から $K_{0,x}$ を得る変形が, すべてライデマイスター移動 I のみを用いているため, ライデマイスター移動 I の定義に矛盾する . よって $K_{0,x}$ は結び目である .

次に, 結び目 $K_{0,0}$ から結び目 $K_{0,x}$ を得る x 回のライデマイスター移動 I による変形のすべてについて, ライデマイスター移動 I により生成される交差点の位置を, 3-正則平面グラフ G の辺

1) 図 17(a) 参照 . 2) 図 18(a) 参照 . 3) 図 31(a), (b) と図 32(a), (b) 参照 . 4) 図 31(b) 参照 . 5) 図 33(b) 参照 . 6) 図 34(b) 参照 . 7) 図 35(b) 参照 . 8) 図 36(b) 参照 .

$e_s (s = 1, 2, \dots, x)$ と全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の辺 $e_s^* (s = 1, 2, \dots, x)$ が交わる点上にとる⁹⁾ .

かつ、同時に、ライデマイスター移動 I による変形の際に生成される面の内部 (辺 e_s 上の交差点を基点とするループ状の曲線の内部) に全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点 $o_k^* (k \neq 0)$ が存在するように各 $K_{0,s} (s = 1, 2, \dots, x)$ を構成する¹⁰⁾ .

次に、3-正則平面グラフ G と双対グラフ G^* を消し、結び目 $K_{0,x}$ のみを残して表示する . そして、結び目 $K_{0,x}$ を直線化する¹¹⁾ .

結び目 $K_{0,x}$ は、 G の辺 e_s に対応する房にのみ χ -タングルが存在する . したがって、この房へ定理 2.2.1 (偶数タングル結び目定理) により偶数個の交差点を任意に与えれば、辺 e_s に対応する房は交差点の数が奇数になる . よって、(2.23) 式の行列 $M(G, a_{is}, a_{it}, \mathbb{K})$ の要素が (2.24) 式に記述されている通り、 $a_{is} = (2h_s - 1)\chi_s$ となることが示された .

一方、 G の辺 e_t に対応する房は、定理 2.2.1 (偶数タングル結び目定理) により偶数個の交差点を任意に与えることが出来るので、(2.23) 式の行列 $M(G, a_{is}, a_{it}, \mathbb{K})$ の要素について、(2.25) 式に記述されているように、 $a_{it} = 2\chi$ であることが示されたことになる .

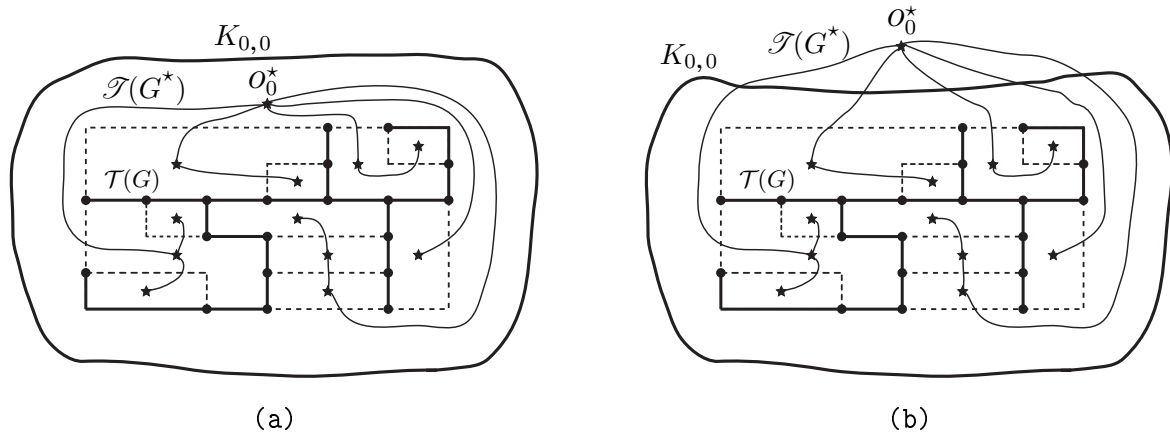


図 31: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (1).

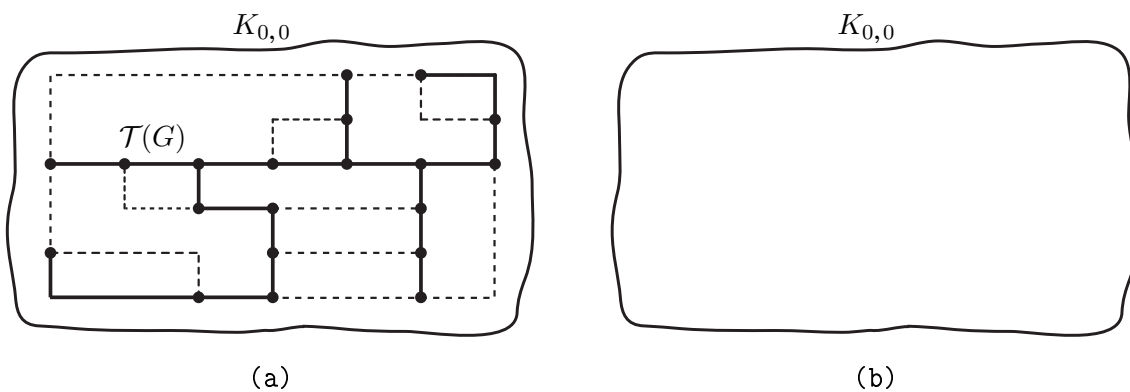


図 32: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (2).

⁹⁾ 図 33(a), 図 34(a), 図 35(a), 図 36(a), 図 38(a), (b), 図 39(a), (b) の各図を参照 . ¹⁰⁾ 図 38(a), (b), 図 39(a), (b) の各図を参照 . ¹¹⁾ 図 37(b) 参照 .

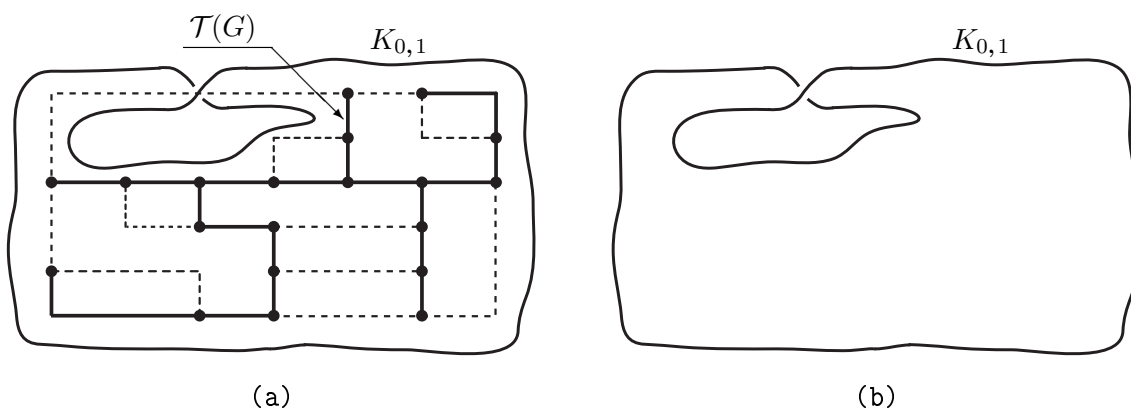


図 33: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (3).

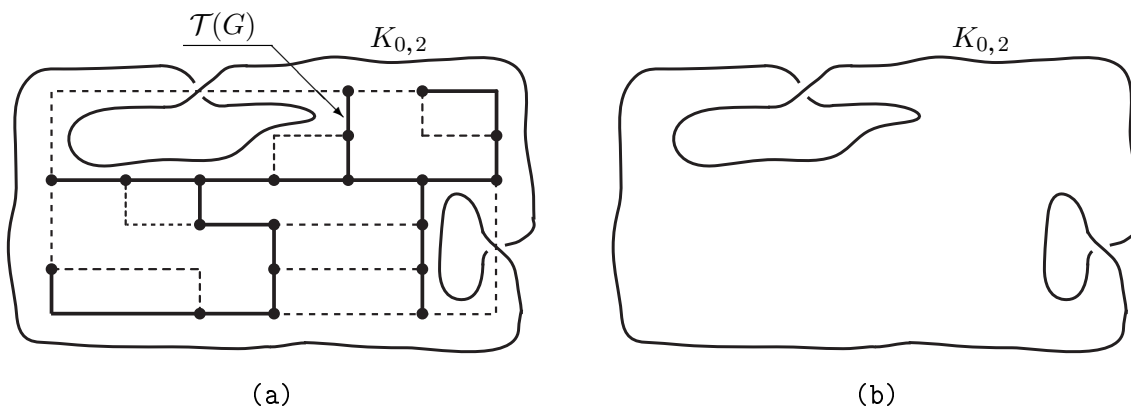


図 34: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (4).

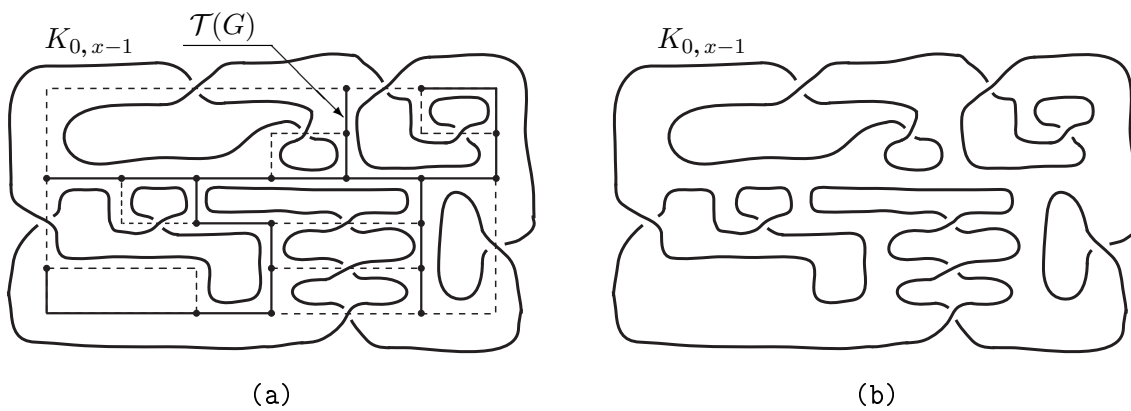


図 35: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (5).

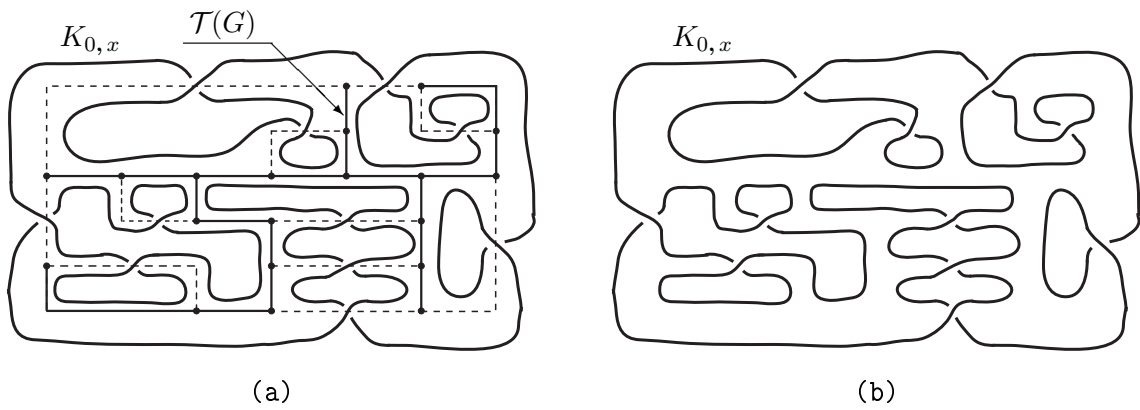


図 36: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (6).

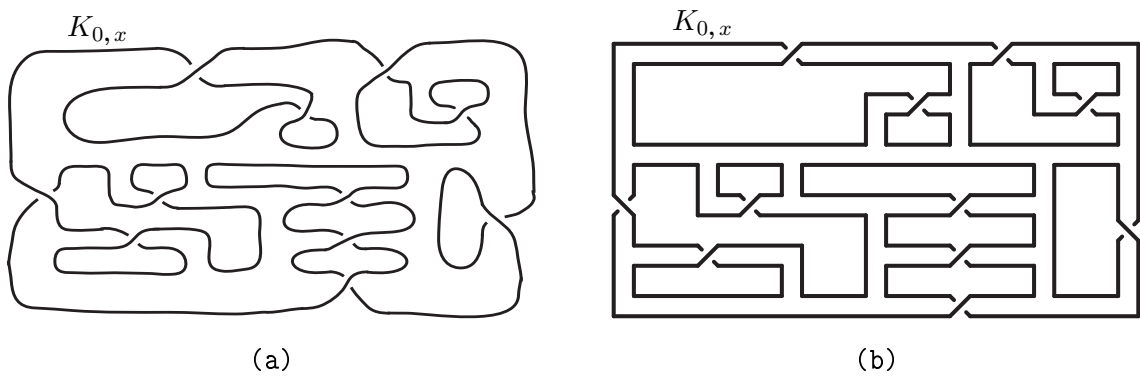


図 37: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (7).

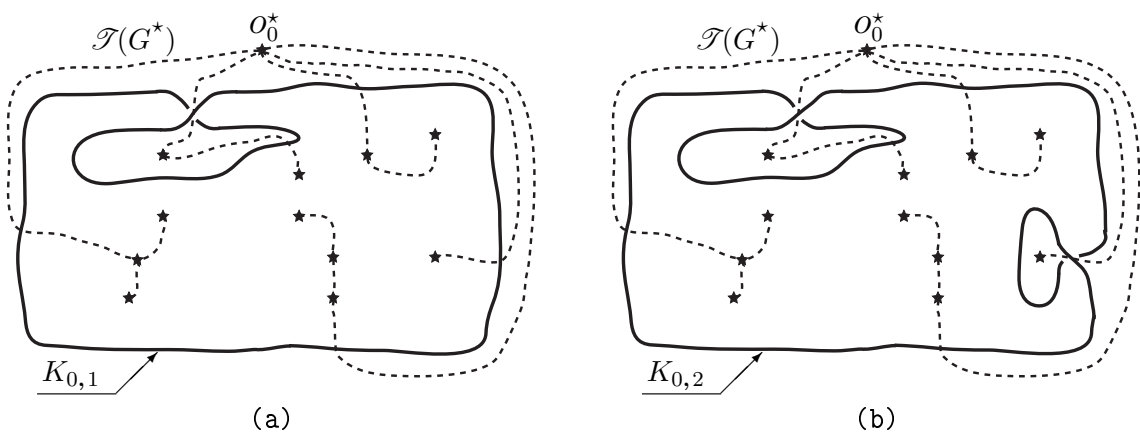


図 38: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (8).

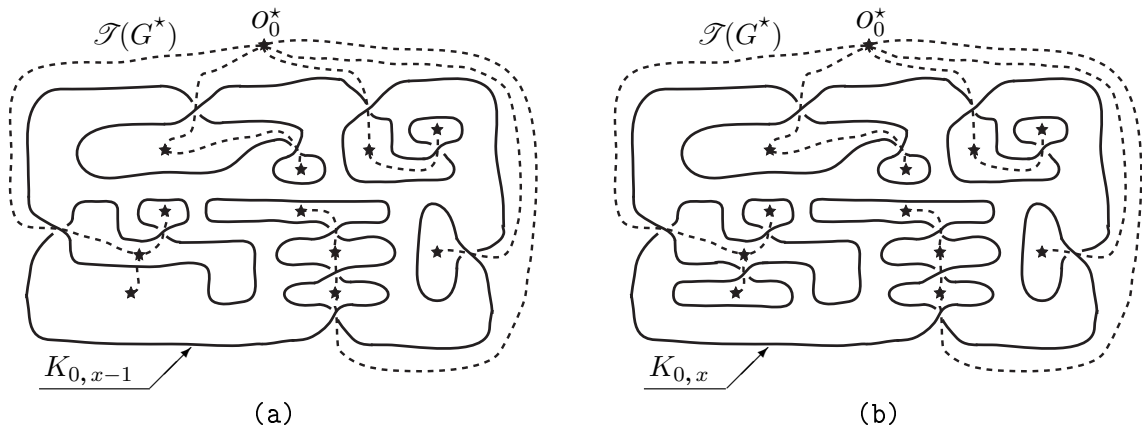


図 39: 全域木結び目定理の証明に対する解説図 (9).

■ (Q.E.D.) (定理 2.4.1 の証明おわり)

付録 E. 図形を用いた「全域木結び目定理の証明」の解説

ライデマイスター移動 I を用いる方法で、定理 2.4.1 (全域木結び目定理) の証明 2.4.3 を付録 D で示した。この方法について、具体的な図形を用いた解説をする。

証明の要点を理解しやすくするために、全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ のみを用いてライデマイスター移動 I を示す。まず、ライデマイスター移動 I の操作を見やすくするために、全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を変形する。この変形の様子を図 40(a), (b) に示した。図 40(a) が変形するまえの図で、図 40(b) が変形したあとの全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ である。

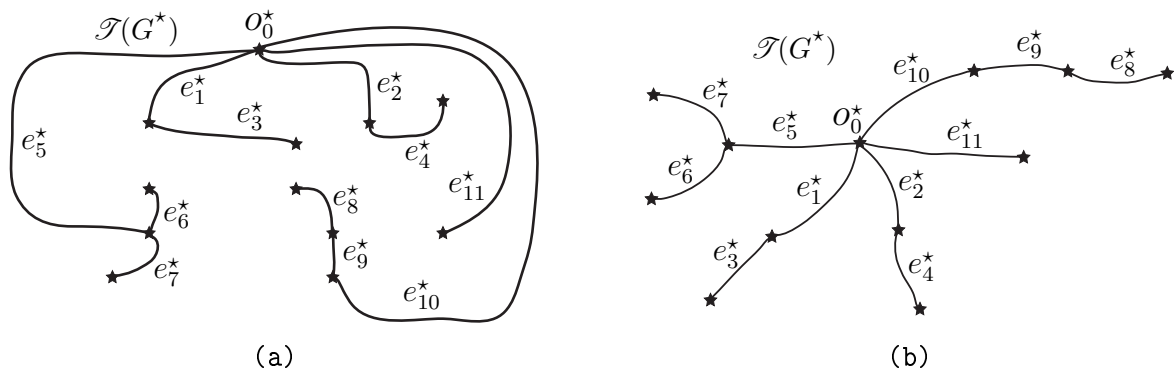


図 40: 全域木結び目定理の証明を理解するための解説図 (1).

図 41(a) が全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を結び目 $K_{0,0}$ (単純閉曲線) の内部に与えた図形である。図 41(b) は、結び目 $K_{0,0}$ を変形し、全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点 o_0^* を結び目 $K_{0,0}$ の外部に移動した図形である。頂点 o_0^* を結び目 $K_{0,0}$ の外部に移動するための変形は、結び目 $K_{0,0}$ の変形でも、全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の変形でも、本質的にはかわりがないので、今の場合には図 41(b) に示したように結び目 $K_{0,0}$ を変形してある。

図 42(a) が結び目 $K_{0,0}$ にライデマイスター移動 I を与えた図形である。ライデマイスター移動 I で生成される交差点を全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の边上の点に重ね、かつ、 $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点をループ状の曲線 C_1 の内部に取り込む様子が図 42(a) に示してある。

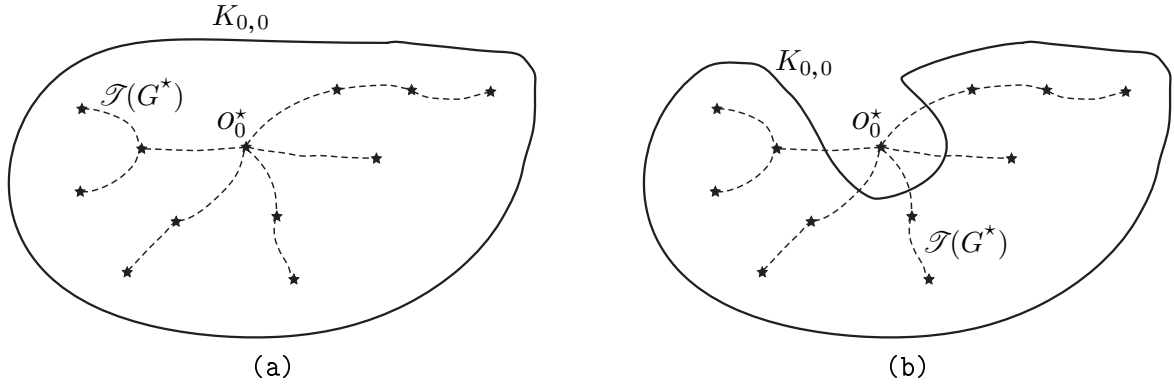


図 41: 全域木結び目定理の証明を理解するための解説図 (2).

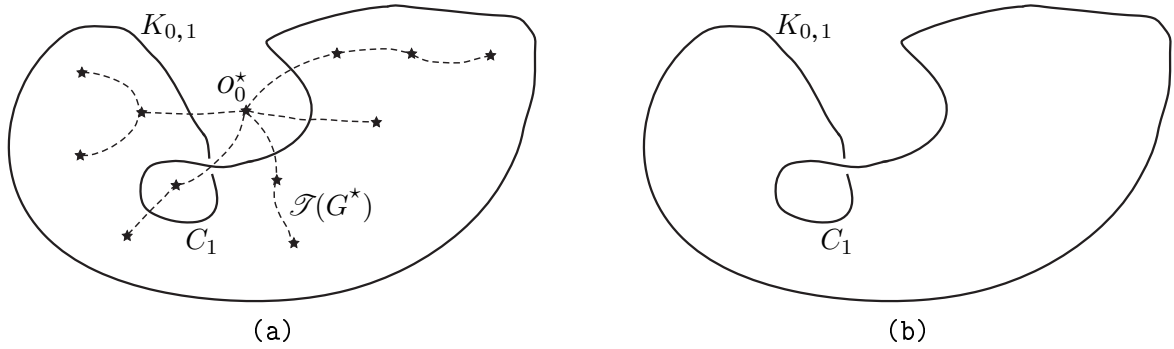


図 42: 全域木結び目定理の証明を理解するための解説図 (3).

図 42(b) は (a) の図形から全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を消した図形で、この図 42(b) に示した $K_{0,1}$ が結び目であることは明らかである。図 43(a) は、二度目のライデマイスター移動 I を与えた図形である。この図でもライデマイスター移動 I で生成される交差点を全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の辺上の点に重ね、かつ、 $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点をループ状の曲線 C_2 の内部に取り込む様子が図 43(a) に示してある。図 43(b) は (a) の図形から全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を消した図形で、この図 43(b) に示した $K_{0,2}$ も結び目であることは明らかである。

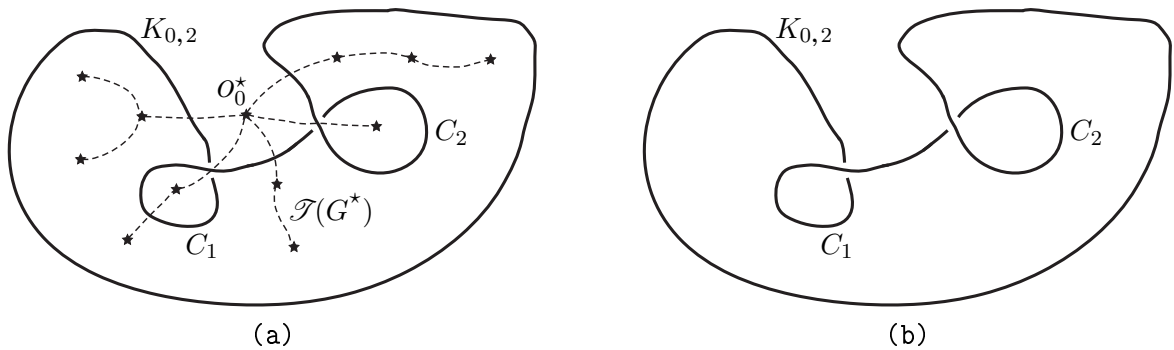


図 43: 全域木結び目定理の証明を理解するための解説図 (4).

こうして、有限回のライデマイスター移動 I を与える操作を続けてゆき、図 44(a) に至る。この図 44(a) は $x-1$ 回目のライデマイスター移動 I を与えた図形であると考えられる。したがって、ループ状の曲線 C_{x-1} が存在する。図 44(b) は (a) の図形から全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を消した図形で、この図

44(b) の $K_{0,x-1}$ が証明では結び目であると仮定した図形である．図 44(b) の $K_{0,x-1}$ は，全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ の頂点 o_x^* のみを残して図示してある．

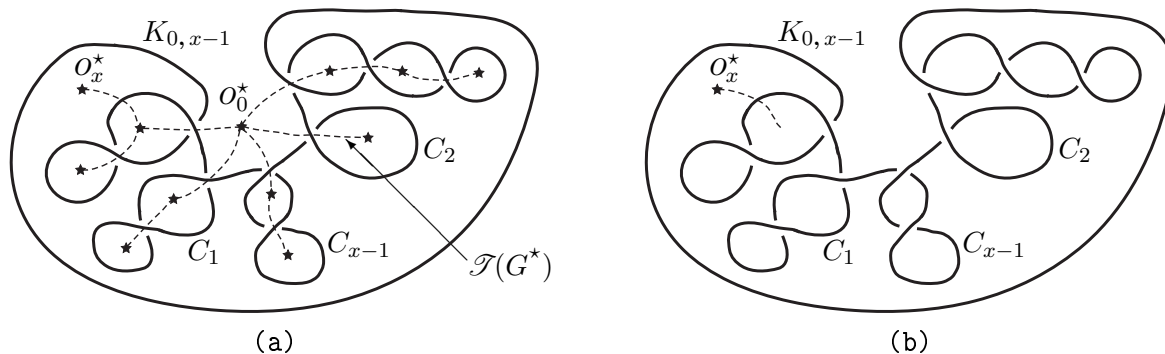


図 44: 全域木結び目定理の証明を理解するための解説図 (5).

図 45(a) の $K_{0,x}$ は，結び目 $K_{0,0}$ に x 回目のライデマイスター移動 I を与えた図形である．したがって，ループ状の曲線 C_x が存在する．結び目 $K_{0,0}$ に $x-1$ 回目のライデマイスター移動 I を与えた図形 $K_{0,x-1}$ が結び目であるとの仮定から， $K_{0,x-1}$ にライデマイスター移動 I を与えた図形 $K_{0,x}$ は結び目になる．図 45(b) は (a) の図形から全域木 $\mathcal{T}(G^*)$ を消した図形で，図 45(b) に図示した $K_{0,x}$ は結び目であることが証明された図形である．

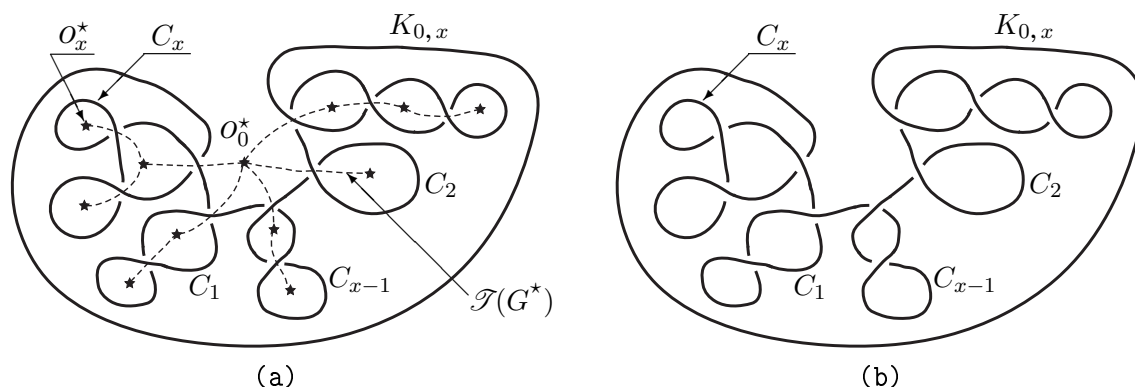


図 45: 全域木結び目定理の証明を理解するための解説図 (6).

なお， $K_{0,x}$ は，ライデマイスター移動 I によるループ状の曲線 $C_1, C_2, \dots, C_{x-1}, C_x$ を与える順番には依存しない．最終的に x 回目の C_x を与えた時点で一意的に $K_{0,x}$ が定まる．

この $K_{0,x}$ に対して，偶数タングル結び目定理を用いて，任意の房へ 2 次タングルを交差点数の総数 ξ (正の整数) だけ与えて得る結び目を $K_{\xi,x}$ とすると， $K_{\xi,x}$ の一例が図 19 に図示した 33 交点結び目の図形である． (完)

「日本数学協会論文集」(別冊 数学文化)，第 2 号，2006 年 12 月，pp.52-79．

- 長島 隆廣 (Takahiro NAGASHIMA)，日本数学協会 (正会員)，1937 年 東京生まれ，無職．
- E-mail: texnagashima@kuc.biglobe.ne.jp